CLASSE TSE/TSEXP : FONCTION EXPONENTIELLE :APC

I-Définition

1.Activité -1:(10 minutes)

Consignes

Montre que la fonction logarithme népérien est bijective et admet une bijection réciproque. Quel est le nom de sa bijection réciproque ?

Détermine l'ensemble de définition et l'ensemble des images de cette fonction.

2. propriétés :

Activité-2 (6 minutes)

Consignes

Pour tous nombres réels a et b, dégage tous les propriétés de la fonction exponentielle que vous connaissez.

La composée des fonctions logarithme et exponentielle donne-t-elle l'identité?

Synthèse partielle :

3.Variation :

Activité-3 :(3 minutes)

Consigne

Les fonctions logarithmes et exponentielles étant des fonctions réciproques alors donné le sens de variation de la fonction exponentielle.

4-limites aux bornes de l'ensemble de définition :

Activité-4 :(6minutes)

Consignes

Donne les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} e^x .$$

Dégage les limites suivantes :

$$(1)\ \lim_{x\to-\infty} x^n e^x \ ,\ n\geq 1 \quad ; \quad (2)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} \ ,\ n\geq 1 \quad ; \quad (3)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} .$$

Synthèse partielle :

5-Etude de la fonction $g(x)=e^x$:

Activité-5 :(15 minutes)

Consigne

Etudie la fonction exponentielle népérienne.

II-Dérivée de la fonction composée e^u :

Activité-6 :(5 minutes)

Consigne

Détermine la dérivée première de chacune des fonctions suivantes :

$a°)\ f(x)=e^{3x}$; $b°)\ g(x)=e^{2x+5}$; $c°)\ h(x)=e^{x^2+7x-4}$; $i(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}$.

III-Primitive de $u'\times e^u$:

Activité-7 :(5 minutes)

Consigne

Détermine une primitive sur I de chacune des fonctions suivantes.

$a°)\ f(x)=2e^{2x+\pi}$; $b°)\ g(x)=(2x+4)e^{x^2+4x-5}$; $c°)\ h(x)=x^2\times e^{x^3-2}$.

IV-Résolutions d'équations et Inéquations :

Activité-8 :(9 minutes)

Consigne

Résous dans IR, les équations et les inéquations suivantes :

$a°)\ e^{5-2x}=1$; $b°)\ e^{3x+1}=e^{\frac{x}{2}+5}$; $c°)\ e^{\frac{2x+1}{x-1}}-e=0$; $d°)\ e^x\prec 0$; $e°)\ e^{5x-1}\geq\sqrt{e}$.

Synthèse Générale :

I-Définition :

Il existe une seule fonction dérivable sur IR qui est égale à sa dérivée et prend la valeur 1 en 0. On l'appelle fonction exponentielle et est notée : $\exp$ ou e.

- $\exp 0=1$
- $\forall x\in IR,\ (\exp)'(x)=\exp x$
- $\exp x\succ 0$
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $IR=]-\infty;+\infty[$.
- La fonction exponentielle est définie sur IR à valeurs dans $]0;+\infty[$.
- La composée $\exp\circ\ln(x)=\ln\circ\exp(x)=x$ c'est-à-dire $e^{\ln(x)}=\ln e^x=x$.

1-Règles de calculs :

Pour tous nombres réels a,b et pour tout nombre rationnel r, on a :

(1) $e^a \times e^b = e^{a+b}$; (2) $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$;

(3) $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$; (4) $\left(e^a\right)^r = e^{ra}$.

<u>Exemple</u> : calcule

$$A = e^{2x-3} \times e^{-x+1} \quad ; \quad B = \frac{e^{2x+1}}{e^{2x-5}} \quad ; \quad C = \left(e^{\frac{1}{2}x}\right)^4$$

<u>Propriétés</u> :

Pour tous nombres réels a et b, on a :

- ✓ $e^a = e^b$ *équivaut à* $a = b$;
- ✓ $e^a \prec e^b$ *équivaut à* $a \prec b$.

En particulier,

- $a \prec 0$ *équivaut à* $0 \prec e^a \prec 1$;
- $a = 0$ *équivaut à* $e^a = 1$;
- $a \succ 1$ *équivaut à* $e^a \succ 1$.

3-<u>limites aux bornes de l'ensemble de définition</u> :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty.$$

Autres limites remarquables :

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$, $n \geq 1$; (2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, $n \geq 1$;

(*Croissance comparée*)

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

4-<u>Etude de la fonction</u> $g(x) = e^x$:

a- Domaine de définition :

$D_g = IR = \left]-\infty ; +\infty\right[$

b- Limites :

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln e^x = 0$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe C_g.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ Possibilité d'asymptote oblique.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

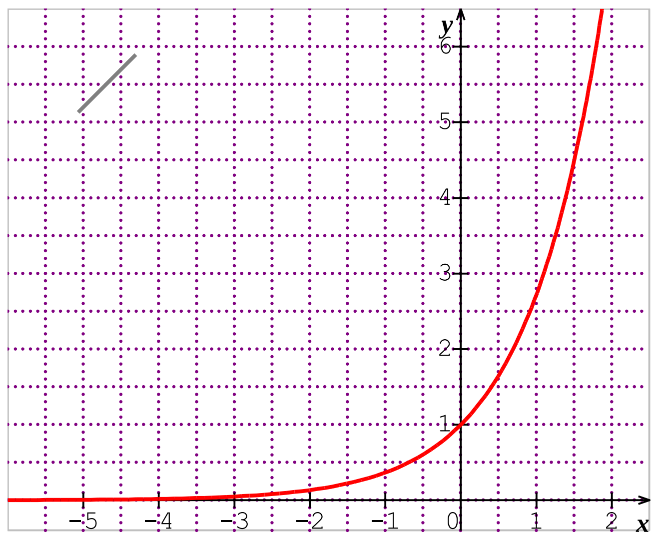
C_g admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (oy).

c-Dérivée :

$g'(x) = e^x \succ 0;\ \forall x \in IR$ *donc g est strictement croissante.*

d-Tableau de variation :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	0	$+\infty$



f- Courbe :

- La droite d'équation $y = 0$ est asymptote verticale à la courbe C_g.
- La tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$ est $y = x + 1$.

C_g admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (oy).

II-<u>Dérivée de la fonction composée</u> e^u :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

La fonction qui à $x \mapsto \exp \circ u$, noté e^u est dérivable sur I. On a :

$(e^u)' = u' \times e^u$.

III-<u>Primitive de</u> $u' \times e^u$:

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction e^u est une primitive sur I de la fonction $u' \times e^u$.

IV-<u>Résolutions d'équations et Inéquations</u> :

<u>Méthodologie</u> :

<u>Equation</u> :

Pour résoudre une équation comportant des exponentielles, on peut :

- On détermine l'ensemble de validité D_v sur lequel l'équation est définie ;
- On utilise les propriétés algébriques de la fonction exponentielle pour se ramener à une égalité de la forme : $e^u = e^v$ qui signifie $a = b$
- On résout cette équation ;

Inéquation :

Pour résoudre une inéquation comportant des exponentielles, on peut :

- On détermine l'ensemble de validité D_v sur lequel l'inéquation est définie ;
- On utilise les propriétés algébriques de la fonction exponentielle pour se ramener à une inégalité de la forme : $e^u \prec e^v$ qui signifie $u \prec v$.
- On résout cette inéquation.

NB : Dans certain cas il suffit d'effectuer un changement de variable.

V-Fonction exponentielle de base a $(a \succ 0)$:

Définition :

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1.

- Pour tout nombre réel x, on a : $a^x = e^{x \ln a}$.
- On appelle fonction exponentielle de base a, la fonction : $x \mapsto a^x$.
- Pour tout nombre réel a strictement positif : $a^0 = 1$, $a^1 = a$.

Exemple :

$3^{0,7} = e^{0,7\ln 3}$; $9^{-2,5} = e^{-2,5\ln 9}$

Remarque :

- La fonction exponentielle de base eest la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.
- La fonction exponentielle de base *10* est la fonction réciproque de la fonction logarithme décimal.
- La fonction exponentielle de base *1* est la fonction constante $x \mapsto 1$.

Propriété :

- Pour tous nombres réels strictement positifs a et pour tout nombre réel x, on a :

$$\ln(a^x) = x \ln a.$$

- Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, pour tous nombres réels x et y, on a :

(1) $a^{x+y} = a^x a^y$; (2) $a^{-y} = \dfrac{1}{a^y}$; (3) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$;

(4) $(a \times b)^x = a^x b^x$; (5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$; (6) $(a^x)^y = a^{xy}$.

Evaluation :

Etudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes dans le même repère orthonormé :

1°) $y = 2^x$; 2°) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$; 3°) $y = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$; 4°) $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$.